Análisis de ondas sísmicas andinas utilizando Wavelets

Maurizi, Mario J.
Instituto de Mecánica Aplicada (IMA)
Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca
Martín, Héctor D.; Aguirre, Ernesto; Soto, Walter; Saucedo, Nicolás.
Regional Académica Reconquista, Universidad Tecnológica Nacional.
Reconquista, Santa Fe, Argentina.
hdmartin@criba.edu.ar, hectordmartin@gmail.com

RESUMEN

En el presente trabajo se realiza en principio una introducción a las wavelets, luego una descripción básica de la potente teoría de la Transformada wavelet o en onditas y su comparación con las bases de Fourier. Terminando con una aplicación al estudio de las señales sísmicas obtenidas de sismógrafos ubicados en la cordillera de los andes.
Ha motivado nuestro estudio la potencialidad de la herramienta matemática para estudio de señales no periódicas como lo son las señales sísmicas.

PALABRA CLAVE

Wavelets – Onditas – Fourier – Señales Sísmicas.

INTRODUCCIÓN

Entre los análisis de señales se encuentran numerosos algoritmos basados en la transformada de Fourier, sin embargo, si ocurre un fenómeno transitorio, las formas de onda asociadas no son periódicas, conteniendo oscilaciones de alta y de baja frecuencia superpuestas a la frecuencia de funcionamiento del sistema. En tal situación, debido a que la transformada de Fourier realiza un promedio de la contribución de las frecuencias, se pierde la localización de la perturbación en el tiempo. El análisis mediante onditas supera esta limitación realizando un procesado de la señal que proporciona información en tiempo y en frecuencia. Por ello, la transformada wavelet es una potente ayuda para el análisis, estudio e interpretación de los distintos fenómenos transitorios que se pueden presentar en una señal sísmica.

ALGO DE HISTORIA

Las wavelet, ondeletas o más comúnmente llamadas onditas, han tenido una historia marcada por descubrimientos independientes, hacemos a continuación un repaso de algunos científicos que hicieron posible la teoría actual:

En el año *1807*, un matemático francés llamado *Jean Baptiste Joseph Fourier*, indica que toda función periódica puede ser expresada como una suma infinita de senos y cosenos de distintas frecuencias. Su artículo fue publicado 15 años después debido a las dudas sobre la exactitud de sus argumentos. Actualmente se encuentran presentes en todas las áreas de la ciencia, son ideales para analizar señales periódicas, pero no tienen igual eficacia en el estudio de fenómenos transitorios o variables en el tiempo, como señales sísmicas, ráfagas de sonido, etc.

En el año *1909* el matemático húngaro *Alfred Haar* propone una base de funciones que se reconocen actualmente como las primeras onditas. Consisten en un breve impulso positivo seguido de un breve impulso negativo.

En el año *1946* el científico británico-húngaro inventor de la holografía, *Dennis Gabor* descompone las señales en "paquetes de tiempo-frecuencia" o también conocidas como "frecuencias de Gabor."

El matemático argentino *Alberto Calderón* descubre en *1960* una fórmula que posteriormente permite a los matemáticos recuperar una señal a partir de la expansión de sus wavelets.

En el año *1981*, *Jean Morlet*, descubre una manera de descomponer las señales sísmicas en los que denomina "wavelets de forma constante". Pide ayuda al físico cuántico *Alex Grossmann* para demostrar que el método funciona.

En *1984* sale un artículo publicado por *Jean Morlet* desarrollando su modelo con la ayuda del físico cuántico *Alex Grossmann*, introduciendo por primera vez el término "wavelet" en el lenguaje matemático.

En *1987*, *Ingrid Daubechies* construye las primeras wavelets ortogonales suaves con soporte compacto. Sus wavelets convierten la teoría en una herramienta práctica que cualquier científico con una formación matemática mínima puede programar y utilizar fácilmente. Las onditas pasan a ser una importante herramienta práctica de cálculo.

En *1995* Pixar Studios presenta la película Toy Story, la primera película de dibujos animados realizada completamente por computadora. En la siguiente, Toy Story 2, algunas formas se realizan mediante superficies de subdivisión, una técnica relacionada matemáticamente con las wavelets.

En 1999, la Organización Internacional de Estándares (International Standards Organization) aprueba un nuevo estándar de compresión de imágenes digital denominado JPEG-2000. El nuevo estándar utiliza wavelets para comprimir archivos de imágenes en una proporción de 1:200, sin pérdidas apreciables en la calidad de la imagen.

La teoría de la Transformada Wavelet o en onditas presenta una alternativa al clásico Análisis de Fourier por ventanas, o localizado. Sus desarrollos, proporcionan poderosas herramientas analíticas para encarar muy diversos problemas, tanto en el campo de las ciencias aplicadas como en la matemática pura. Es interesante observar que esta teoría nace de la respuesta empírica a un problema específico de la Ingeniería, más precisamente de procesamiento de señales.

EL SISTEMA DE HAAR Y SUS ONDITAS

Presentamos primeramente un ejemplo de un sistema ortonormal en [0, 1 conocido como el sistema de Haar. Las bases de Haar, además de ser las más simples, como se menciona previamente, son históricamente el primer ejemplo de una base ortonormal de onditas. Alguna de sus propiedades resultan en claro contraste con las correspondientes propiedades de las bases trigonométricas.

Por ejemplo:

Las funciones bases de Haar tienen soporte en un pequeño intervalo de [0,1 , mientras que las bases de Fourier son distintas de cero en todo ese intervalo.

Las funciones bases de Haar son escalonadas con saltos de discontinuidad, en cambio las de Fourier son C (infinitamente derivables) sobre [0,1 .

Las bases de Haar reemplazan la noción de frecuencia (representada por el índice n en las bases de Fourier) por las noción dual de escala y localización (indexadas separadamente por *j* y *k*).

Las bases de Haar proveen una eficiente representación de funciones que posean suaves o lentas variaciones en tramos y sectores en los cuales varia puntualmente por picos y discontinuidades, mientras que las bases de Fourier tienen buena representación funciones que presentan muchos términos con comportamiento oscilatorio.

La primera meta es la construcción de las bases de Haar en el intervalo [0,1 . Previamente se introducirán algunos conceptos para comprender el análisis de multirresolución para la construcción de las bases de wavelets.

Se definen los **Intervalos Diádicos** para cada par de enteros *j*, *k* de la siguiente manera:

$$I_{j,k} = [2^{-j}k,\ 2^{-j}(k+1)] \tag{1}$$

La colección de todos estos intervalos se conocen como los subintervalos diádicos en los Reales.

Llamamos **Función Diádica Escalonada** a la que tiene la propiedad que para algún valor *j* entero es constante en todo el intervalo diádico $I_{j,k}$ siendo *k* también entero.

A partir de esto se construyen entonces las funciones wavelets de Haar:

Dada la función p(x) definida en el intervalo diádico [0, 1] de la siguiente manera:

$$p(x) = \begin{cases} +1 & si \quad 0 \le x < 1/2 \\ -1 & si \quad 1/2 \le x < 1 \end{cases} \tag{2}$$

Tener en cuenta que fuera del intervalo [0, 1] la función $p(x)$ es nula.

Definimos ahora:

$$p_{j,k}(x) = 2^{j/2}\, p(2^j - k) \tag{3}$$

En donde 2^j produce la dilatación y *k* la traslación.

LOS PROGRESOS EN LA MEDICIÓN DE SEÑALES

Muchos de los fenómenos físicos y socioeconómicos que nos rodean, han sido desde hace tiempo objeto de estudio y análisis, por ejemplo los sonidos, las señales eléctricas, los datos financieros, las variaciones mecánicas, etc. En un principio se trataba de obtener una representación de los mismos que relacionara su valor con el instante en que tenía lugar, es decir, en el dominio *tiempo-amplitud*.

Matemáticamente el proceso del análisis de Fourier está representada por la **Transformada de Fourier** que resulta de la suma en el tiempo de la señal $f(t)$ multiplicada por una exponencial compleja.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \tag{4}$$

El resultado de la transformada son los coeficientes de Fourier F( ) los cuales, cuando son multiplicados por senos de frecuencia , constituyen las componentes sinusoidales de la señal original. Es decir, que se tiene una representación *frecuencia- amplitud* de la señal.

Gráficamente, el proceso de Fourier luce como se muestra en la Figura 1.

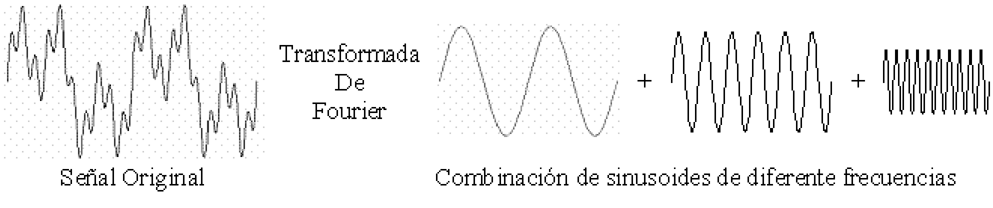

Figura 1: Señal original y su descomposición realizada por el proceso de Fourier.

Luego, a partir de la señal descompuesta, se puede volver a reconstruir la señal original utilizando la transformación inversa:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{5}$$

La **Transformada de Gabor** realiza un análisis de la señal tal que es capaz de representar en cada instante de tiempo, las componentes de frecuencia de la señal; se trata de un dominio *tiempo-frecuencia*.
Gabor analiza la señal seleccionando intervalos temporales, como se muestra en la Figura 2.

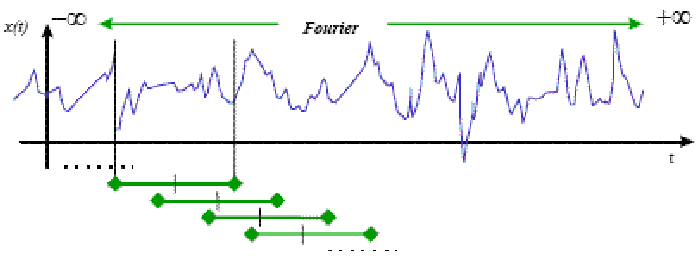

Figura 2: Ventana de Gabor

La transformada de Gabor se expresa matemáticamente:

$$G(\omega,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(t-\tau)\, e^{-j\omega t} dt \tag{6}$$

Con ella es posible localizar la respuesta de frecuencia en el tiempo, pero existe una incertidumbre en la localización. Esto es debido a que la resolución depende del tamaño de la ventana escogida para el análisis. Los intervalos mayores permiten una buena resolución en frecuencia, y ventanas estrechas una correcta localización temporal. Se ha de establecer un compromiso entre la incertidumbre temporal o la de frecuencia, que dependerá de cada tipo de aplicación.
La **Transformada Wavelet** nos permiten realizar análisis en el dominio *tiempo- escala*. De forma similar a como en el análisis de Fourier se representa una señal mediante la suma de sinusoides de distintas amplitudes y frecuencias múltiplos de la fundamental; en el análisis de onditas, se representa una señal en función de una señal patrón o base, que es trasladada y cambia su escala. Mediante este método se compara una onda con una señal patrón $\psi(x)$, que se origina mediante la dilatación de forma iterativa de una función de escalonamiento $\phi(x)$. La forma final de la señal patrón obtenida, depende del número de coeficientes que se han utilizado para la generación de la función de escalonamiento. A menor número de coeficientes, la señal es más escarpada, y a mayor número es más suavizada.

LAS ONDITAS O WAVELETS

Se trata de una forma de onda de duración limitada que tiene valor promedio cero. Si comparamos las wavelets con las funciones seno que forman la base del análisis de Fourier, observamos que las sinusoides no tienen duración limitada, se extienden de menos infinito a más infinito. Las sinusoides son suaves y predecibles, por el contrario, las onditas tienden a ser irregulares y asimétricas.
El análisis de Fourier consiste en dividir una señal en ondas seno de diferentes frecuencias. Similarmente, el análisis de wavelet realiza la división de la señal en dilataciones y traslaciones de la ondita original o wavelet madre.

Comparando las onditas y la función seno, se puede ver intuitivamente que las señales con cambios abruptos deberán ser analizadas con onditas irregulares y no con suaves sinusoides, de la misma forma que algunos alimentos son mejor manipulados con tenedor que con una cuchara. Esto es en el sentido de que las características locales pueden ser mejor descriptas con onditas que tiene extensión localizada.
En la Figura 3 se muestran los gráficos de algunas onditas conocidas

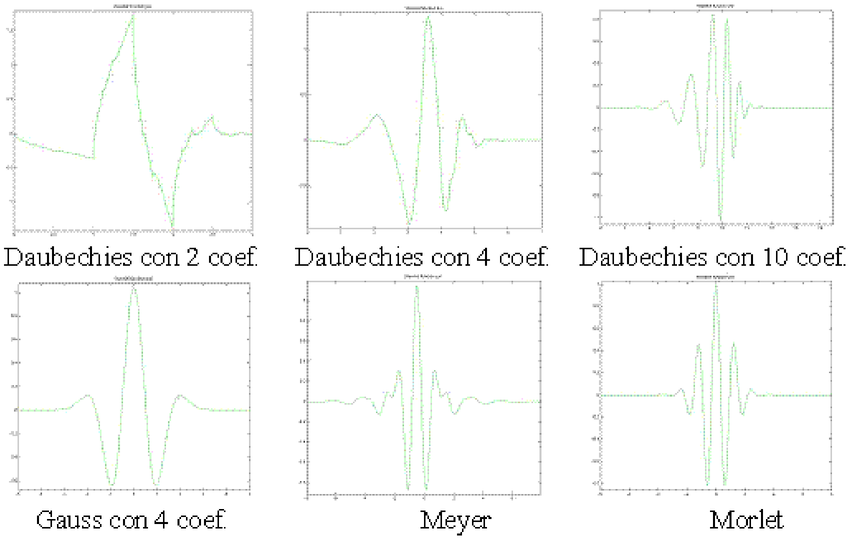

Figura 3: Gráficos de algunas de las onditas más utilizadas.

La elección de una u otra, es función de la aplicación. Una vez escogida, mediante traslaciones y cambios de escala, se la compara con la señal a analizar.

Algunas de las condiciones elementales que una onda debe cumplir para ser una wavelet son las siguientes: ser oscilatoria, tener un valor medio nulo y caer rápidamente a cero, esto significa que no es nula en un corto período de la función.

LA TRANSFORMADA CONTINUA DE WAVELETS

Similarmente a lo que expresa Fourier, la Transformada Continua de Wavelets (CWT) está definida como la suma en el tiempo de la señal multiplicada por la función wavelet trasladada y dilatada:

$$c(escala, posicion) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\Psi(escala, posicion, t)\,dt \qquad (7)$$

El resultado de la CWT son los coeficientes c, los cuales son función de la escala y la posición. Multiplicando cada coeficiente por una apropiada ondita, cambiada de escala y posicionada, producen las onditas de la señal original, como se muestra en la Figura 4.

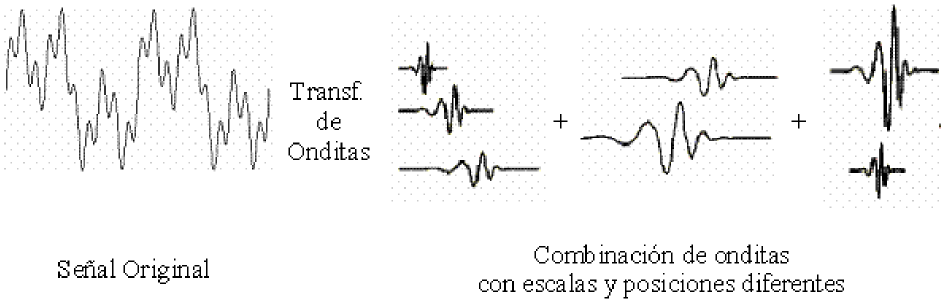

Figura 4: Señal original y la combinación de onditas.

Cambio de Escala

Cambio de escala en una ondita significa estirarla o comprimirla. Para ir mas allá de una descripción coloquial, tal como el estiramiento, introducimos el factor de escala, a menudo denotado por la letra **a.** El efecto de la escala, por ejemplo en una sinusoide es fácil de ver, ya que aumenta la frecuencia o disminuye el período: sen(t/**a**). El factor de escala produce exactamente lo mismo con las wavelets. Es claro que para la sinusoide sen(t) el factor de escala **a** es la inversa de .

Traslaciones (shifting)

Las traslaciones en las onditas significan atrasos o adelantos, matemáticamente en una función *f*(*t*), esto se representa por *f*(*t*-*k*) y lo podemos ver en la Figura 5.

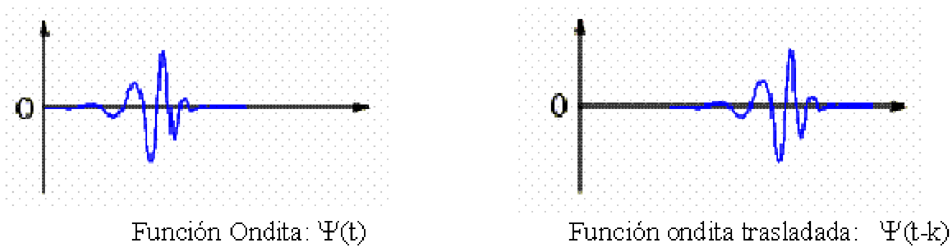

Figura 5: Función ondita y función ondita trasladada.

LA TRANSFORMADA DISCRETA DE ONDITAS

Realizando las operaciones de cambio de escala y traslación sucesivamente, se obtienen los coeficientes de la transformada wavelet discreta (DWT). Matemáticamente se define:

$$W(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \qquad (8)$$

A partir de estos valores, se realiza la descomposición de la señal original en distintos niveles. Los niveles están asociados a su vez con distintas frecuencias, correspondiendo niveles más altos a frecuencias mayores.
Calcular todos los coeficientes de wavelets en todas las escalas posibles resulta claramente muy trabajoso y genera un tremendo lote de datos. ¿Que ocurre si sólo elegimos un conjunto de escalas y posiciones en los cuales realizar los cálculos?
En torno a esto es que se eligen escalas y posiciones basadas en potencias de dos, llamadas escalas y posiciones diádicas. Luego nuestro análisis será mucho más eficiente y exacto. Obtenemos dicho análisis de la Transformada Discreta de Wavelets (DWT).

Un camino eficiente para implementar este esquema utilizando filtros, fue desarrollado en 1988 por Mallat [Mal98] Mallat, S. (1998), A wavelet tour of signal processing, Academic Press. El algoritmo de Mallat en efecto fue un clásico algoritmo, conocido en la comunidad de expertos en procesamiento de señales como “two-channel subband coder”. Este práctico algoritmo de filtrado produce una rápida transformada de onditas, una caja en la cual la señal pasa y de la cual emergen rápidamente los coeficientes de wavelets.

En el análisis de señales, no sólo existe la etapa de descomposición, sino que para que el proceso sea efectivo, es necesario poder realizar la reconstrucción de la señal. En el proceso de reconstrucción, la parte del filtrado también presenta alguna discusión porque es crucial la elección del filtro para conseguir la perfecta reconstrucción de la señal original.

ANÁLISIS DE SEÑALES SÍSMICAS.

En el presente trabajo se muestra la aplicación de esta potente herramienta matemática en el análisis de las señales obtenidas de un sismo ocurrido en proximidades de la ciudad de Mendoza.

Los datos analizados se obtienen del Servicio de Información Sísmica (SIS) de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional. Se procesan los últimos datos publicados a la fecha en la página web de la FRM, que corresponden al sismo registrado el día 15 de septiembre de 2007, a las 16:17:03 (hora Oficial Argentina), con zona Epicentral ubicada a 10 km al Oeste de la Ciudad de Mendoza.

Se utiliza, para realizar los análisis de las señales sísmica, el Software Matlab que dispone de un paquete de herramientas suficientemente amplio con un abanico muy completo de funciones wavelet. El empleo de una u otra depende del detalle con que se quiera analizar la señal.

En el presente trabajo se analizan los tres canales de la señal sísmica utilizando las onditas Daubechies de cuarto orden. En la Figura 6 se muestra la función de escala y la Wavelet madre correspondiente. Esta ondita posee las siguientes características: soporte compacto, es ortogonal y biortogonal, se la ha trabajado en forma contínua pero es posible utilizarla en Transformada Discreta.

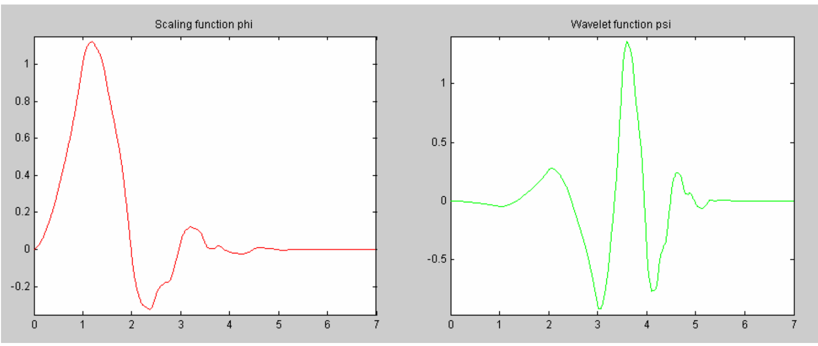

Figura 6: Función escala y wavelet madre Daubechies de cuarto orden.

Los coeficientes obtenidos de los análisis de los tres canales se muestran en las Figuras 7, 8 y 9, que corresponden a las direcciones Este-Oeste, Vertical y Norte-Sur respectivamente.

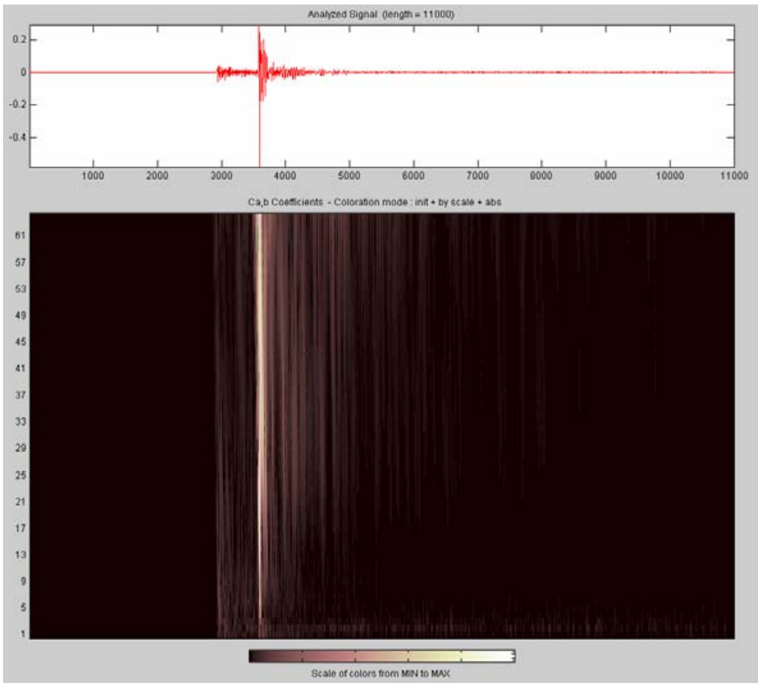

Figura 7: Señal obtenida del canal 1, dirección Este Oeste y los coeficientes del análisis de la Transformada Contínua con Onditas Daubechies de cuarto orden.

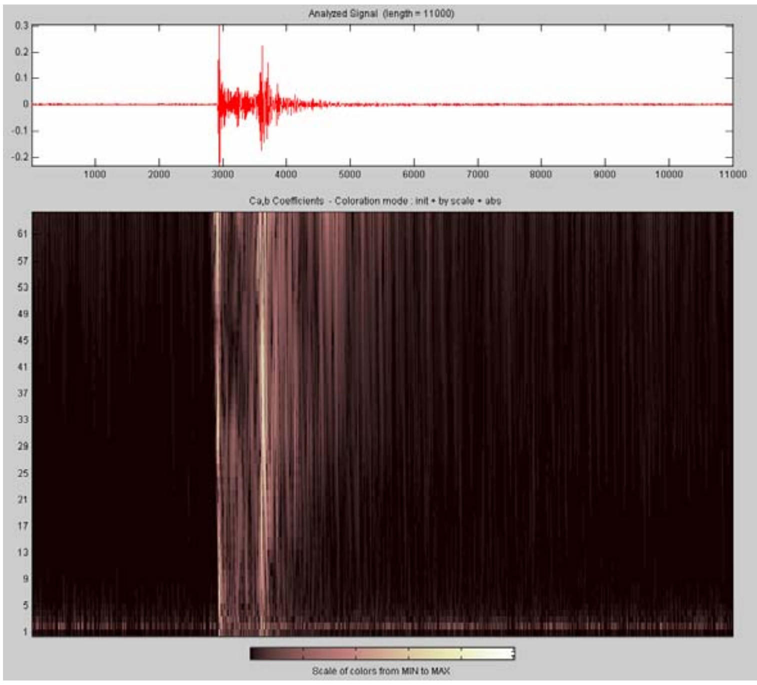

Figura 8: Señal obtenida del canal 2, dirección Vertical y los coeficientes del análisis de la Transformada Contínua con Onditas Daubechies de cuarto orden.

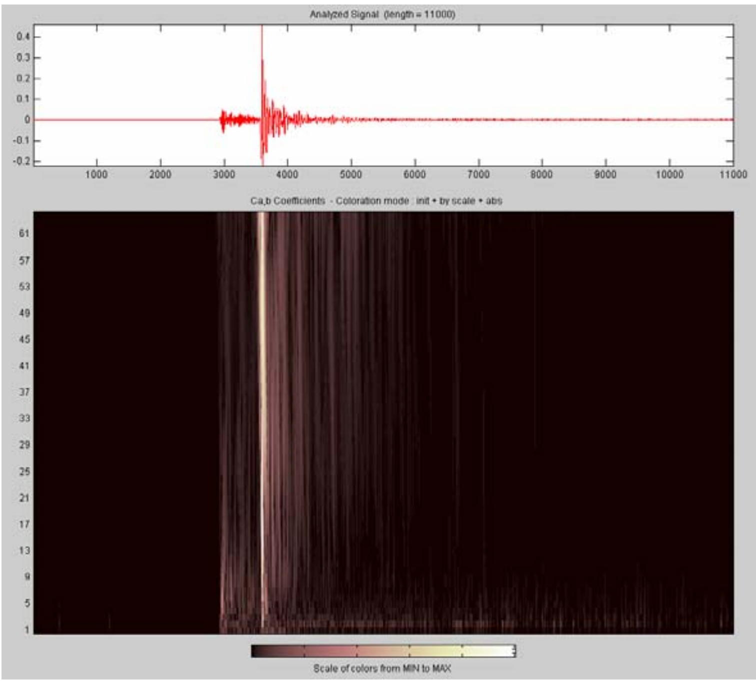

Figura 9: Señal obtenida del canal 3, dirección Norte-Sur y los coeficientes del análisis de la Transformada Contínua con Onditas Daubechies de cuarto orden.

Los coeficientes se presentan en la grafica através de una serie de colores, que indican su valor absoluto. Este último depende del grado de relación existente, entre la señal original y la ondita trasladada y dilatada.
En el grafico de la Figura 10 se presenta un segmento de la señal derivada del canal 1, en el cual ampliamos la zona donde se presentan las principales aceleraciones, así podemos ver en detalle la distribución de los valores absolutos de los coeficientes C.

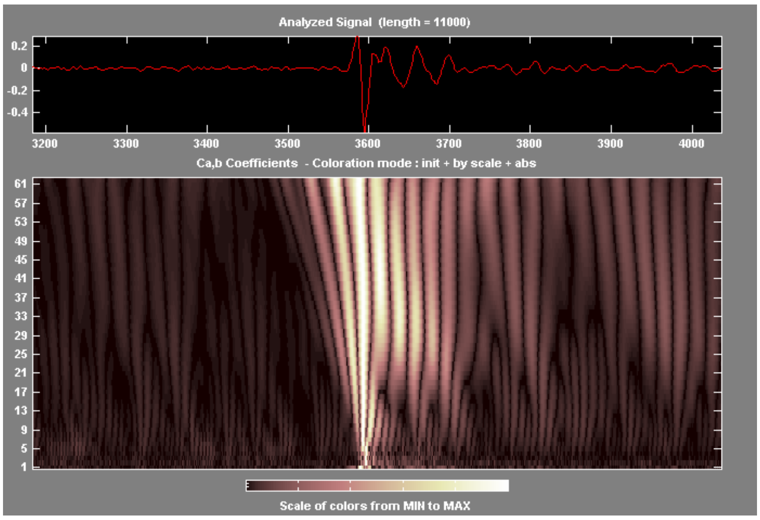

Figura 10: Señal obtenida del canal 1, dirección Este Oeste y los coeficientes del análisis de la Transformada Continua con Onditas Daubechies de cuarto orden.

Con el objetivo de obtener nuevos resultados analizamos las señales de los tres canales utilizando la ondita Morlet la cual presenta la forma indicada en la Figura 3.

Los coeficientes obtenidos del estudio de los tres canales se muestran en las Figuras 11, 12 y 13, que corresponden a las direcciones Este-Oeste, Vertical y Norte-Sur respectivamente.

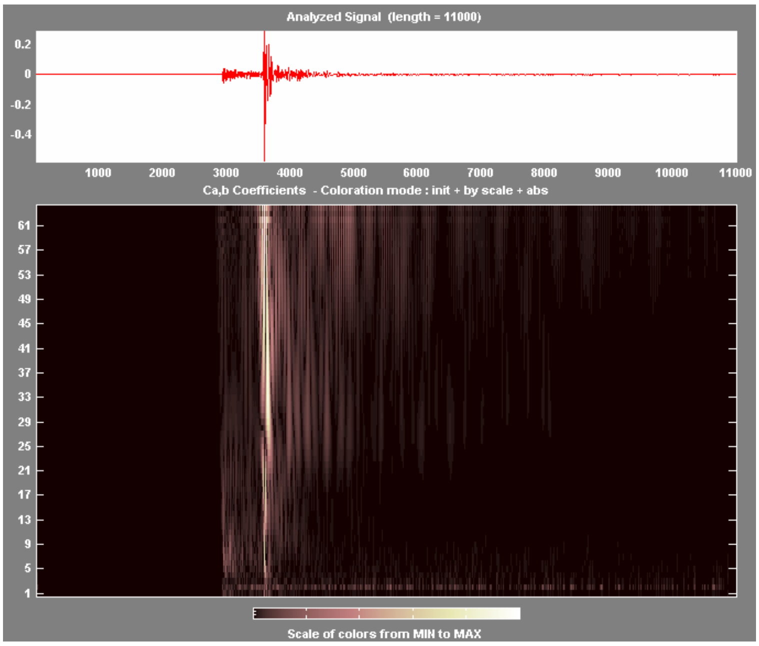

Figura 11: Señal obtenida del canal 1, dirección Este Oeste y los coeficientes del análisis de la Transformada Continua con Onditas Morlet.

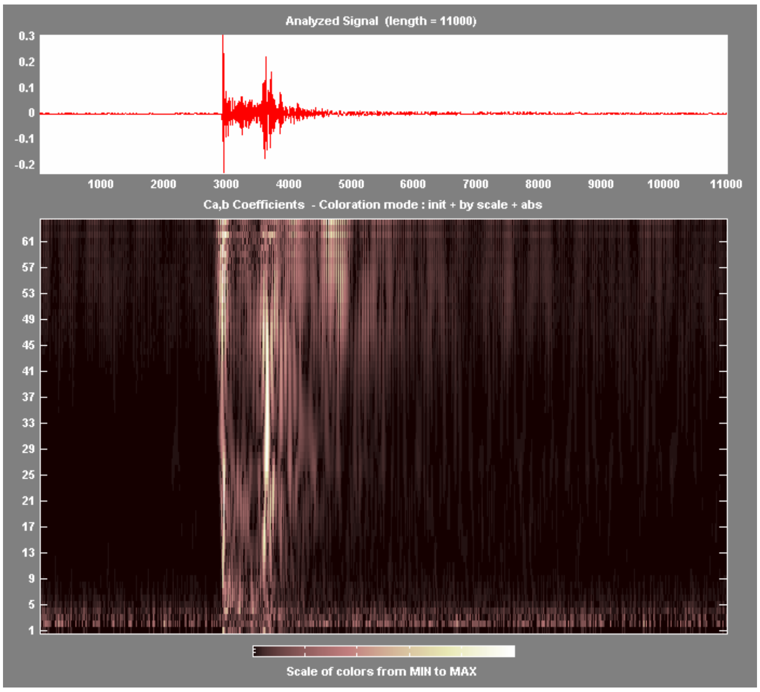

Figura 12: Señal obtenida del canal 2, dirección Vertical y los coeficientes del análisis de la Transformada Continua con Onditas Morlet.

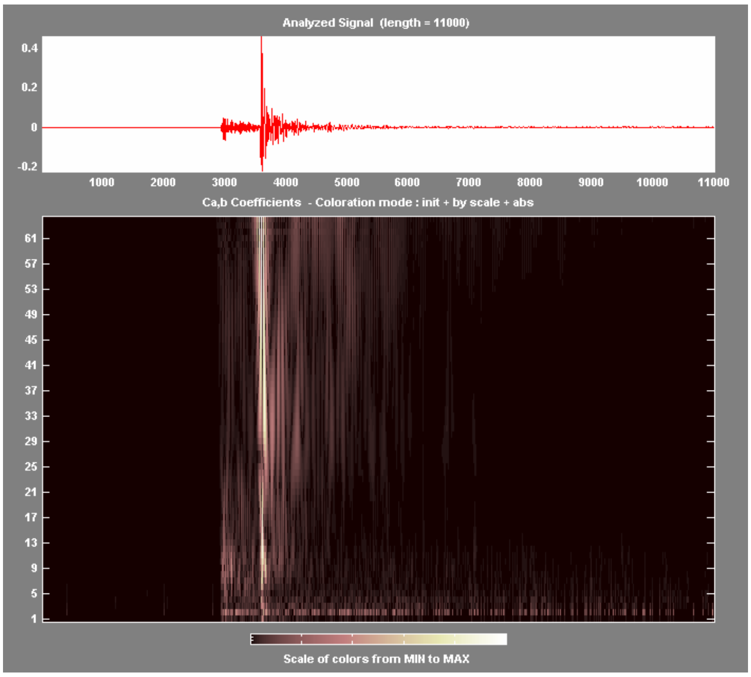

Figura 13: Señal obtenida del canal 3, dirección Norte-Sur y los coeficientes del análisis de la Transformada Continua con Onditas Morlet.

En los gráficos mostrados anteriormente, se tomó en el eje vertical valores hasta 64, veamos que pasa si esto lo aumentamos hasta 4000, haciéndolo en pasos de 20 en 20. Quedan las Figuras 14, 15 y 16 correspondientes siempre a la misma señal con ondita Daubechies de cuarto orden

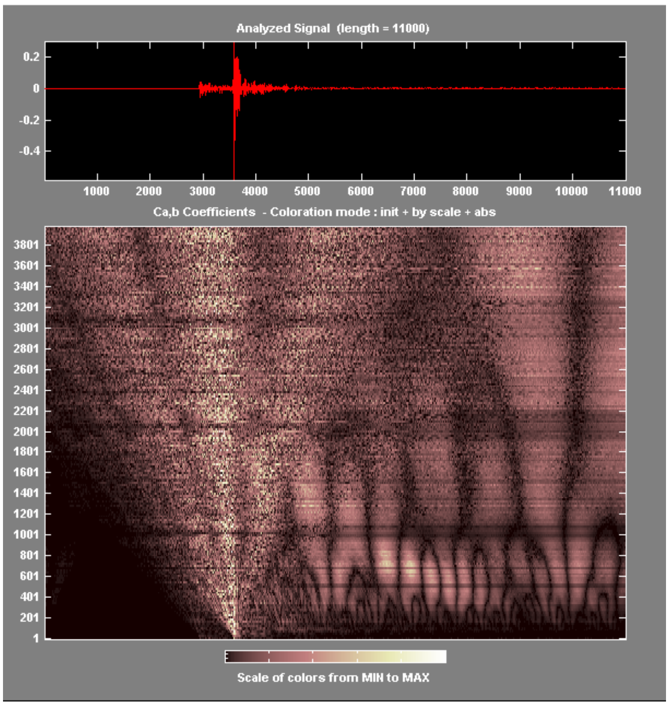

Figura 14: Señal obtenida del canal 1, dirección E-O y los coeficientes de la Transformada Contínua con Onditas Daubechies de 4to orden con escala en eje vertical hasta 4000.

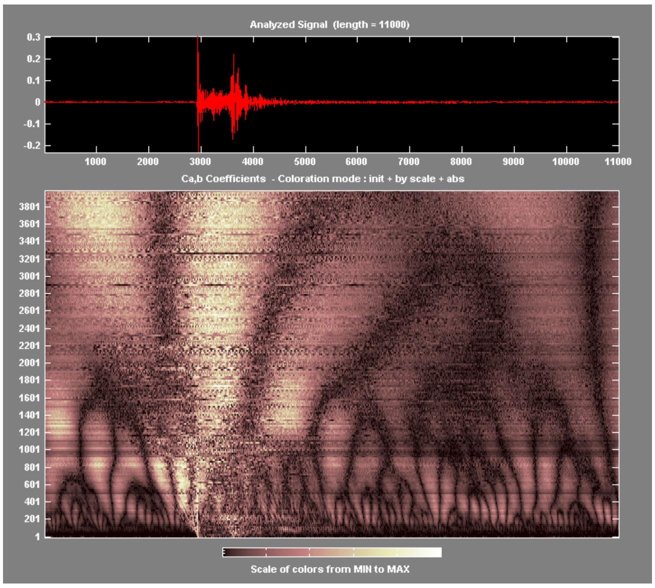

Figura 15: Señal obtenida del canal 2, dirección Vertical y los coeficientes de la Transformada Contínua con Onditas Daubechies de 4to orden con escala en eje vertical hasta 4000.

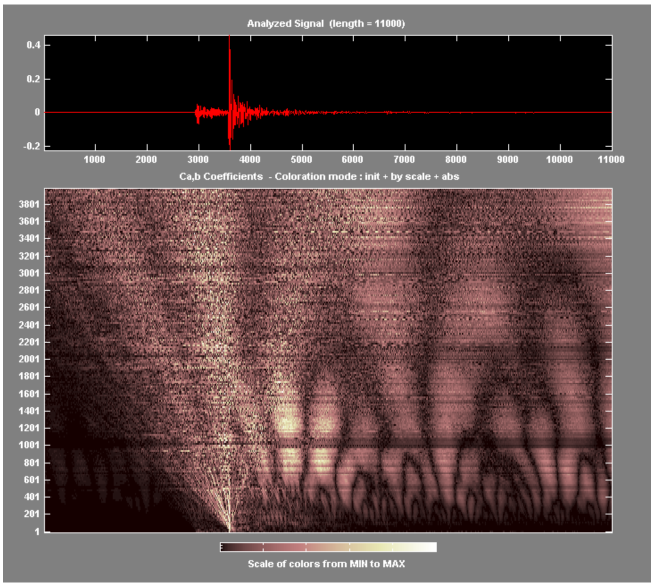

Figura 16: Señal obtenida del canal 1, dirección N-S y los coeficientes de la Transformada Contínua con Onditas Daubechies de 4to orden con escala en eje vertical hasta 4000.

CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una introducción al estudio de las wavelet a través de su historia y se discutieron sus ventajas sobre la Transformada de Fourier para señales no periódicas.
Se realizaron los análisis de la señal sísmica obtenida de un sismógrafo ubicado en la Ciudad de Mendoza, si bien el caso presentado es relativamente simple, queda en evidencia el potencial de esta herramienta para este tipo de señales.

Consideramos que es motivo de un estudio más amplio mejorar las interpretaciones de las señales analizadas e investigar las ventajas que pueden presentar otro tipo de Ondita Madre. Es nuestro compromiso continuar analizando las señales detectadas por los sismógrafos de la cordillera andina.
La Transformada Continua de Onditas (CWT) nos da una información más precisa que la información "estática" que proporcionan los algoritmos de la Transformada Rápida de Fourier. (FFT).
Sabemos que no todo se puede hacer con wavelets, pero que sí suponen una herramienta muy potente para el cálculo y análisis de señales, y no dudamos en calificar como verdadera revolución en el campo de la matemática.

REFERENCIAS

Walnut, David F. **An Introduction to Wavelet Analysis**, 2004, Birkhauser Boston

Burrus, Sindey C., Ramesh A. Gopinath and Haiatao Guo. Introduction to wavelets and Wavelet Transform, 1998, Prentice Hall.

Gilbert Strang and Truong Nguyen, **Wavelets and Filter Banks,** 1996, Wellesley-Cambridge Press.

Gomes, Jonas and Velho, Luis. From Fourier Analysis to Wavelets. Course Notes SIGGRAPH99

Mackenzie, Dana. **Wavelets: ver el bosque y los árboles.** The Path from Research to Human Benefit, National Academy of Sciences, Washington, D.C, U.S. 2001.

Michel Misiti, Georges Oppenheim, Yves Misiti y Jean-Michel Poggi. Matlab Wavelet Toolbox.

Lorenzo**,** Javier Iglesias**,** 2003 Diseño de un relé neuronal de protección para líneas arreas de AT con procesado de señal mediante la transformada wavelet, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Cataluña.

Montejo, Luis A., Suarez, Luis E. Aplicaciones de la Transformada Ondícula (Wavelet) en Ingeniería Estructural. Mecánica Computacional **Vol.** XXVI, pp.2742-2753.

Ovanesova, A. y Suárez, L. E. “Applications of Wavelet Transforms to Damage Detection in Frame Structures,” *Engineering Structures*, **Vol.** 26, No.1, pp. 39-49. 2004.

Suárez, L.E. y Montejo, L.A. “Generation of Artificial Earthquakes via the Wavelet Transform”, *International Journal of Solids and Structures*, **Vol.** 42 (21-22), pp. 5905-5919. 2005.

PÁGINAS EN INTERNET

http://www.frm.utn.edu.ar/sismos/
http://nuclear.fis.ucm.es/webgrupo/archivos/WAVELETS.ppt
http://www7.nationalacademies.org/spanishbeyonddiscovery/mat_008276.html
http://nuclear.fis.ucm.es/webgrupo/archivos/WAVELETS.ppt
http://www.geociencias.unam.mx/~roman/OBSERVGEOM/wavelets.ppt
http://cipres.cec.uchile.cl/~rradiszc/
http://www.cnea.gov.ar/cac/endye/glea/trabajos/serrano.pdf
http://es.wikipedia.org/wiki/Wavelet
http://www.ams.org/notices/199706/walker.pdf
http://www.ears.dmu.ac.uk